「4 次元情報学」の構築に向けて

＊星野好晃[1]，沼晃介[2] ，根上生也[1]
（1）横浜国立大学，（2）東京大学
〒240-0067 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-1
E-mail : bibliomanias [at] gmail.com

Abstract: われわれは，ユークリッド幾何学的 4 次元を情報技術と融合し「4 次元情報学」ともいうべき領域を構築することを目指している．一般的には図形問題の理解支援の手段として，図形の可視化が有効であると考えられるが，4 次元図形は構造上，3 次元空間上では不可能図形になってしまうため，図形の持つ情報をどう表現するのかという工夫が求められる．また，直感的な図形操作に必要な情報量が汎用の入力装置では確保できないため，入力装置のためのインターフェースについても検討する必要がある．本稿では，この目標に向けてのわれわれの取り組みについて紹介する．

1. はじめに

本研究で扱うユークリッド幾何学的 4 次元とは，われわれの住んでいる 3 次元空間を構成している縦・横・奥行きの 3 要素全てに対して直交する第 4 の座標軸を持つ次元である．このユークリッド幾何学的 4 次元は，図形問題として計算することは可能である．しかし，その形状を数式から人間が“理解”することは容易ではない．一般的には図形問題の理解支援の手段として形状を把握するための可視化が有効であると考えられるが，4 次元の図形はわれわれの住む 3 次元よりも構造上の情報量が多いため，そのままの姿では 3 次元空間上で不可能図形となってしまう．そのため，4 次元図形の可視化には図形の持つ情報をどう表現するのかという工夫が求められる．

また，既存のマウスやキーボードといった入力装置では，4 次元図形を直感的に操作するために必要な情報量を確保できない．それを実現するためには，それら汎用の入力装置ではなく，4 次元の構造に則した入力装置の設計が必要となってくる．

本研究は，これらの数学的要素，可視化手法，インタラクション手法などを融合することによって，ユークリッド幾何学的 4 次元と情報技術を融合した「4 次元情報学」ともいうべき領域を構築し，ユークリッド幾何学的 4 次元を数理的な方向からではなく体感的体験的なアプローチによって理解していくのを支援することを目標とする．以下，この目標に向けてのわれわれの取り組みについて紹介する．

2. ユークリッド幾何学的 4 次元図形

2.1. ユークリッド幾何学的 4 次元

自然数 n について，ユークリッド幾何学的 n 次元は n 個のそれぞれが直交している座標軸を持つ．n 次元では，任意の点はその位置を，各座標軸によって与えられる n 個の座標数値によって一意に定められる．例えば，われわれの住んでいる 3 次元空間はそれぞれが直交している縦・横・

奥行きの方向に座標軸を設定でき，これにより 3 次元空間内の任意の点を座標として表現することが可能である．

n 次元を（n-1）次元からの拡張と考えるならば，一般に（n-1）次元の中にはない別の方向で且つ（n-1）次元の各座標軸と直交する方向に広がったものが n 次元となる．つまりユークリッド幾何学的 4 次元とは，3 次元空間の 3 つの座標軸全てに直交する第 4 の座標軸の方向にも広がりを持つ超空間ともいうべき空間を構成している次元である．なお，0 次元は座標軸を持たず広がりのない点を指し，1 次元は 0 次元点が任意の 1 方向に移動した軌跡としての直線を指す．

本稿での図形は，頂点，辺とその組み合わせによって拡張される幾何学図形が囲む領域で形成される凸形状の幾何学図形を扱う．n 次元図形の最大構成要素は（n-1）次元図形である．4 次元図形は 3 次元図形からの拡張であり，その構成要素は点・辺・面・3 次元図形である．この 3 次元図形を胞と呼ぶ．

2.2. 4 次元立方体

正 n 次元図形を正（n-1）次元図形の組み合わせによって構成される図形と定義する．n 次元図形を考える際，この正 n 次元図形がもっとも規則性や対称性を持っており扱いやすい．その中でもっとも基礎的なものとして扱えるのが n 次元立方体である．n 次元立方体は，正方形（2 次元立方体），立方体（3 次元立方体），4 次元立方体，…と，規則的に拡張可能な n 次元正角柱である．各次元において，構成する全ての頂点が中心から等距離であり，各頂点を結ぶ辺の長さは全て等しく，交差する辺は全て直交する．

n 次元立方体は各頂点が中心から等距離にあるため，容易にモデリングが可能である．例えば辺の長さを 2 として，原点中心にモデリングすると n 次元立方体は 2n 個の頂点の座標に n 個の 1 と-1 の全ての組み合わせ 2n 個がひとつずつ入る．

このように，n 次元立方体は n 次元空間や n 次元図形を考える際の基礎的な形状なので，本稿では以降の 4 次元図形についてはこの 4 次元立方体を考える．

3. 4 次元図形の可視化手法

われわれの住む 3 次元より高次元である 4 次元図形はその構造上，その姿をそのまま 3 次元空間で再現しようとしても，幾何学的実現が不可能な図形になってしまう．そのため，4 次元図形の次元を落とす形での可視化がここでは必要とされる．一般に n 次元図形の次元を落として可視化する方法として，図形を展開する手法と投影する手法が考えられる．

花村らの Qube は，4 次元立方体の展開模型をコンピュータ上で実現し，胞をそれぞれ部屋のように見立てそれを行き来し 4 次元図形の表層を歩くことで，4 次元図形の構造を体感的に理解させることを狙った[花村 2005]．しかし，この手法には展開後の図形が構成要素の接続関係を把握するための支援にはなるが，元の 4 次元図形の形状を把握することが困難であるという問題がある．外形把握によって 4 次元図形の理解を促進するためには投影による可視化の方がより適切であると考えられる．そこでわれわれは，4 次元図形を 3 次元空間に投影し，これをインタラクティブに操作することで理解の促進を狙う．

また，人間は 3 次元空間において，光が物体に当たることによって生じる陰影を奥行きや物体の形状を知覚するための手がかりとしている[Ramachandran 1988]．この陰影による立体および空間把握能力が 4 次元に拡張されることによって図形理解の助けになることを期待して，描画に際しては，4 次元空間での陰影付けを考慮した[星野 2008]．

4 次元では構成要素が 1 次元分拡張され，面単位ではなく胞単位で向き付けが行われる．例えば 3 次元空間での 3 次元立方体は，それを構成している 6 面についてそれぞれ別の向きを向いていると考える．各面ではそれを構成している点や辺だけではなく，面の内部全てを含めて同じ方向を向いている．これに対し，4 次元立方体の胞は，その内部も含めた全体が一つの方向を向いていると考える．そのため 4 次元図形では，内部も含めた胞全体が平行光の光線に対して同じ角

度を成すので，胞全体が一様に同じ陰影になると予想できる（**図 1**）．このように，4 次元での陰影は 3 次元の陰影と異なるので，それは 4 次元図形に特有の表現といえるのと同時に，4 次元の理解に役立つと期待できる．

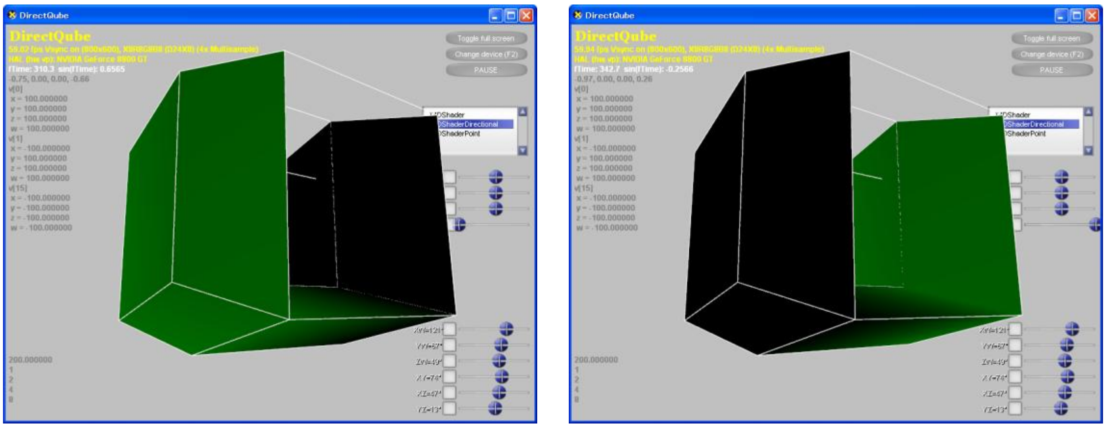

図 1：4 次元方向からのライティングと逆方向からのライティング

4. インタラクションモデル

現時点での研究では，可視化した 4 次元図形をスライダ操作などの簡易なユーザインタフェースを通じ操作することを可能とした．しかし 4 次元図形は，4 つの直行座標軸から 2 つを組み合わせてできる各平面に沿って回転するため 6 種類の回転方向があり，これを 6 つのスライダで行うのは体感的な図形回転での理解とは言い難い．そのため，可視化した 4 次元図形をより直感的に操作するインタラクション原理の研究も必要である．以下で，4 次元空間の数理的特徴を確認し，4 次元図形の回転制御を行う 4 次元コントローラを実装するためのインタラクションモデルを紹介する．

4 次元空間は，通常の実数体$\mathbb{R}$の 4 次元拡張として$\mathbb{R}^4$と表現することもできるが，複素数体$\mathbb{C}$が 2 つ直交してできる$\mathbb{C}^2$も 4 次元空間を表現している．$\mathbb{C}^2$は複素 2 次元という．複素 2 次元は，

$$\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) | z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$$

となっており，複素数zはオイラーの公式より，

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= r\cos\theta + r\sin\theta\, i \\ &= r(\cos\theta + \sin\theta\, i) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned}$$

という極形式で表現できる．これは複素数を回転で記述していることになり，前述の複素 2 次元では，

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

と記述できる．

これは，2 つの独立したパラメータと回転によって 4 次元座標の回転が制御できる可能性を示している．例えば，回転軸を 2 つ持つようなハンドル型のコントローラであれば，それを回転させることによって複素 2 次元の 2 つの回転を制御し，4 次元図形を回転させることができるだろう（**図 2**）．

また，4 次元立方体に関してはその特徴として，8 つの胞が 4 つずつ，2 つのトーラスが互いに絡み合うような構造で並んでいる．この 4 次元立方体の回転する様子を観察していくと，片方のトーラス構造がその中心を回転軸として回転した時，もうひとつのトーラス構造の表面がめくれ上がるようにして連動して回転しているのが分かる．この構造をコントローラで再現すれば，4 次元立方体の各胞の接続関係が回転によって観察することができると期待できる（**図 3**）．

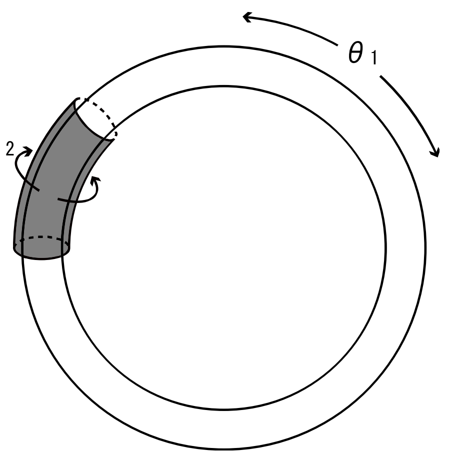

図 2：回転制御型コントローラ

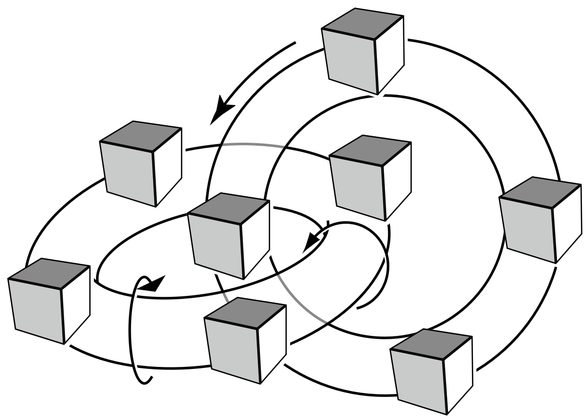
図 3：構造制御型コントローラ

5.　本研究の意義と展望

4 次元情報学の実現によって，構造を扱う数学的問題の解決に寄与することも期待できる．例えば位相幾何学的グラフ理論の問題には，3 次元空間では幾何学的実現が不可能な図形であるクラインの壺や射影平面を対象にするものが存在する．それらは 4 次元座標系ならば構造的に実現可能であるため，その可視化は理解支援や問題解決にも貢献できると考える．

また，本来われわれの住む 3 次元世界では，高次の存在である 4 次元図形を見ることはできない．しかし，本稿で述べた手法をはじめとする 4 次元情報学によって数理的な知識が十分ではない人であっても，ユークリッド幾何学的 4 次元を体感的体験的に理解していくことができるはずである．われわれの提案する 4 次元情報学によって 4 次元図形を理解し，“見えた”と実感することができれば，それは 3 次元人の空間認識能力の限界をある面において拡張することができたといえるだろう．構造的に複雑なものを理解する能力が向上し，幾何学問題だけに限らない，高度な情報処理が可能になっていくと期待している．例えば情報の可視化などに本研究の知見を適用することによって，既存手法では困難であった情報の探索，発見，理解の可能性が開かれると考える．

6.　おわりに

今回紹介した可視化手法とインタラクションは，4 次元情報学全体の中で，人間の直感的な理解を促すための手段として主にアプリケーションの出力側に必要とされる部分である．われわれは現在，陰影の効果について明確にするため，比較的シンプルな陰影手法を提案しているが，今後は 3 次元で代表的なほかのライティングモデルについても 4 次元についてどうなるのかを検討していく必要がある．また，現状は議論を簡潔にするために 4 次元立方体を扱ったが，今後ほかの 4 次元図形や曲面で構成される 4 次元超球体やクラインの壺といった図形をどうモデル化するかなども検討していきたい．

参考文献

[花村 2005] 花村創史，相馬海一郎，小松隆行，上松大輝，沼　晃介，根上生也：Qube：4 次元空間に誘うソフトウェア．インタラクション 2005 ポスターセッション．

[Ramachandran 1988] Perception of shape from shading. Nature, 331, 163-166.

[星野 2008] 星野好晃，沼晃介，根上生也：可視化とインタラクションによる 4 次元図形の理解支援，情報処理学会コンピュータと教育研究会 .